1.1) Dados os vetores $\vec{M} = -5\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$, e $\vec{N} = -7\hat{a}_x + 7\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$, determine:

(a) um vetor unitário na direção de $-\vec{M} + 2\vec{N}$;

(b) o módulo de $5\hat{a}_x + \vec{N} - 3\vec{M}$

(c) $|\vec{M}|.|\vec{N}|.(\vec{M} + \vec{N})$

a) $-\vec{M} = +5\hat{a}_x - 2\hat{a}_y - 3\hat{a}_z$ e $2\vec{N} = -14\hat{a}_x + 14\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$, assim $-\vec{M} + 2\vec{N} = -9\hat{a}_x + 12\hat{a}_y + \hat{a}_z$.

O vetor unitário nesta direção será $\hat{u} = \frac{-\vec{M}+2\vec{N}}{|-\vec{M}+2\vec{N}|} = \frac{-9\hat{a}_x+12\hat{a}_y+\hat{a}_z}{\sqrt{9^2+12^2+1^2}} = \frac{-9}{\sqrt{226}}\hat{a}_x + \frac{12}{\sqrt{226}}\hat{a}_y + \frac{1}{\sqrt{226}}\hat{a}_z$

b) $-3\vec{M} = +15\hat{a}_x - 6\hat{a}_y + 9\hat{a}_z$, assim $5\hat{a}_x + \vec{N} - 3\vec{M} = 13\hat{a}_x + \hat{a}_y + 11\hat{a}_z$. O módulo deste será $\sqrt{13^2 + 1^2 + 11^2} = \sqrt{291}$

c) $|\vec{M}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{38}$, $|\vec{N}| = \sqrt{7^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{102}$ e $\vec{M} + \vec{N} = -12\hat{a}_x + 9\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$, assim

$|\vec{M}|.|\vec{N}|.(\vec{M} + \vec{N}) = -12\sqrt{3876}\,\hat{a}_x + 9\sqrt{3876}\,\hat{a}_y + 5\sqrt{3876}\,\hat{a}_z$.

1.2) Dados três pontos A(2, 3, 4), B(- 2, 0, 6) e C(9, - 1, 2):
(a) determine o vetor A dirigido da origem ao ponto A;
(b) determine um vetor unitário dirigido da origem até o ponto médio da linha AB;
(c) calcule o perímetro do triangulo ABC.

a) $\vec{\mathrm{A}} = 2\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{x}} + 3\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{y}} + 4\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{z}}$

b) $Vetor\ da\ orígem\ até\ o\ ponto\ médio\ de\ \vec{\mathrm{A}}\ para\ \vec{\mathrm{B}} = \dfrac{\vec{\mathrm{B}} + \vec{A}}{2} = \dfrac{3}{2}\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$

$$Versor\ da\ orígem\ até\ o\ ponto\ médio\ de\ \vec{\mathrm{A}}\ para\ \vec{\mathrm{B}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{109}}{2}}\left(\frac{3}{2}\hat{a}_y + 5\hat{a}_z\right) = \frac{3}{\sqrt{109}}\hat{a}_y + \frac{10}{\sqrt{109}}\hat{a}_z$$

c) $Distância\ entre\ A\ e\ B \ \rightarrow\ \left|\vec{\mathrm{B}} - \vec{A}\right| = \left|-4\hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 2\hat{a}_z\right| = \sqrt{29}$

$$Distância\ entre\ B\ e\ C \ \rightarrow\ \left|\vec{\mathrm{C}} - \vec{B}\right| = \left|11\hat{a}_x - 1\hat{a}_y - 4\hat{a}_z\right| = \sqrt{138}$$

$$Distância\ entre\ A\ e\ C \ \rightarrow\ \left|\vec{\mathrm{C}} - \vec{A}\right| = \left|7\hat{a}_x - 4\hat{a}_y - 2\hat{a}_z\right| = \sqrt{69}$$

$$Perímetro \ \rightarrow\ \sqrt{29} + \sqrt{138} + \sqrt{69}$$

1.3) Um campo vetorial e dado por $\vec{G} = 24z\hat{a}_x + 12(x^2 + 2x)\hat{a}_y + 18y^2\hat{a}_z$. Dados dois pontos, P(1, 2, -1) e Q(-2, 3, 1), determine:
(a) G em P;
(b) um vetor unitário da direção de G em Q;
(c) um vetor unitário dirigido de Q ate P;
(d) a equação da superfície na qual $|\vec{G}| = 60$

a) $$\vec{G}(P) = 24\text{x}(-1)\hat{a}_x + 12(1^2 + 2\text{x}1)\hat{a}_y + 18(2)^2\hat{a}_z = -24\hat{a}_x + 36\hat{a}_y + 72\hat{a}_z$$

b) $$\vec{G}(Q) = 24\text{x}1\hat{a}_x + 12\big((-2)^2 + 2\text{x}(-2)\big)\hat{a}_y + 18x3^2\hat{a}_z = 24\hat{a}_x + 162\hat{a}_z$$

$$Vetor\ unitário = \frac{24\hat{a}_x + 162\hat{a}_z}{\sqrt{26820}}$$

c) $$Vetor\ de\ Q\ para\ P \rightarrow \vec{P} - \vec{Q} = 3\hat{a}_x - \hat{a}_y - 2\hat{a}_z$$

$$Vetor\ unitário = \frac{3\hat{a}_x - \hat{a}_y - 2\hat{a}_z}{\sqrt{14}}$$

d) $$|\vec{G}| = \sqrt{24^2z^2 + 12^2(x^2 + 2x)^2 + 18^2y^4} = 60$$

$$16z^2 + 4(x^2 + 2x)^2 + 9y^4 = 100$$

2.1) Dados os pontos M(1; 2; - 0,5), N(0,2; 0,5; 1) e P(0,5; 0; 2), determine:
(a) o vetor $\vec{R}_{MN}$;
(b) o produto escalar $\vec{R}_{MN}$ e $\vec{R}_{MP}$;
(c) a projeção escalar de $\vec{R}_{MN}$ em $\vec{R}_{MP}$;
(d) o angulo entre $\vec{R}_{MN}$ e $\vec{R}_{MP}$.

a) $\vec{R}_{MN} = \vec{N} - \vec{M} = -0{,}8\hat{a}_x - 1{,}5\hat{a}_y + 1{,}5\hat{a}_z$

b) $\vec{R}_{MP} = \vec{P} - \vec{M} = -0{,}5\hat{a}_x - 2{,}0\hat{a}_y + 2{,}5\hat{a}_z$

$\vec{R}_{MN} \cdot \vec{R}_{MP} = 0{,}4 + 3{,}0 + 3{,}75 = 7{,}15$

c) $O\ produto\ escalar\ entre\ \vec{A}\ e\ \vec{B}\ é\ a\ projeção\ de\ \vec{A}\ em\ \vec{B}\ vezes\ o\ módulo\ de\ \vec{B}$

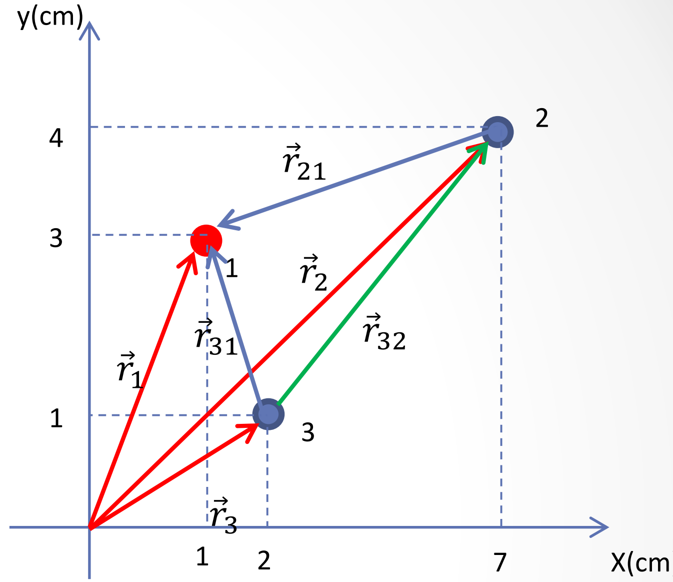
$$A\ projeção\ de\ \vec{R}_{MN}\ em\ \vec{R}_{MP} = \frac{\vec{R}_{MN} \cdot \vec{R}_{MP}}{|\vec{R}_{MP}|} = \frac{7{,}15}{\sqrt{10{,}5}}$$

d) $\vec{R}_{MN} \cdot \vec{R}_{MP} = |\vec{R}_{MN}||\vec{R}_{MP}|\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{R}_{MN} \cdot \vec{R}_{MP}}{|\vec{R}_{MN}||\vec{R}_{MP}|} = \frac{7{,}15}{\sqrt{5{,}14}\sqrt{10{,}5}}$$

$$\theta = 13{,}3^o$$

2.2) A figura abaixo mostra 3 cargas pontuais de valores q1 = -3 μC, q2 = 2μC e q3 = 3μC.
a) Descreva os vetores posições de cada carga usando os versores da base cartesiana.
b) Descreva o vetor posição da carga 2 com relação a carga 3 e o seu versor correspondente.
c) Calcule o vetor força de cada carga e o total sobre a carga 1, considerando a interação das duas outras cargas.



a) $\vec{r}_1 = \hat{a}_x + 3\hat{a}_y$ $\qquad \vec{r}_2 = 7\hat{a}_x + 4\hat{a}_y$

$$\vec{r}_3 = 2\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

b)

$$\vec{r}_{32} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = 5\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$$

$$\hat{r}_{32} = \frac{5\hat{a}_x + 3\hat{a}_y}{\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}\hat{a}_x + \frac{3}{\sqrt{34}}\hat{a}_y$$

c)

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -6\hat{a}_x - \hat{a}_y \qquad r_{21} = \sqrt{37} \qquad \vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = -\hat{a}_x + 2\hat{a}_y \qquad r_{31} = \sqrt{5}$$

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{21}|^2}\hat{r}_{21} = k\frac{q_1q_2}{37x10^{-4}}\frac{-6x10^{-2}\hat{a}_x - 1x10^{-2}\hat{a}_y}{\sqrt{37}x10^{-2}} = -9x10^9\frac{(-3x10^{-6})(+2x10^{-6})}{37\sqrt{37}x10^{-6}}6x10^{-2}\hat{a}_x - 9x10^9\frac{(-3x10^{-6})(+2x10^{-6})}{37\sqrt{37}}1x10^{-}$$

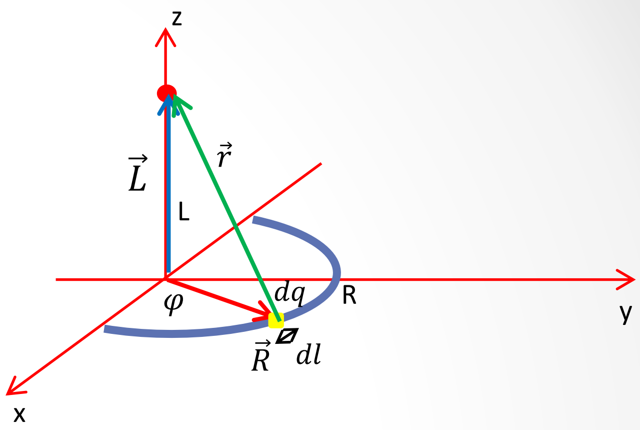
$$\vec{F}_{12} = 14{,}4\hat{a}_x + 2{,}4\hat{a}_y\ N$$

$$\vec{F}_{13} = k\frac{q_1q_3}{|\vec{r}_{31}|^2}\hat{r}_{31} = k\frac{q_1q_3}{5x10^{-4}}\frac{-1x10^{-2}\hat{a}_x + 2x10^{-2}\hat{a}_y}{\sqrt{5}x10^{-2}} = -9x10^9\frac{(-3x10^{-6})(+3x10^{-6})}{5\sqrt{5}x10^{-6}}1x10^{-2}\hat{a}_x + 9x10^9\frac{(-3x10^{-6})(+3x10^{-6})}{5\sqrt{5}}2x10^{-2}\hat{a}$$

$$\vec{F}_{12} = 7{,}2\hat{a}_x - 14{,}4\hat{a}_y\ N$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = 21{,}6\hat{a}_x - 12\hat{a}_y\ N$$

2.3) A figura abaixo mostra uma linha de carga semicircular de raio a, carregada com carga total -Q. Ela está totalmente no plano yz.
a) Escreva a expressão integral de todas as componentes do campo elétrico para o cálculo do campo elétrico num ponto a uma distância h em cima do eixo z que está posicionado no centro do semicírculo.
b) Calcule o vetor campo elétrico no ponto do item a.



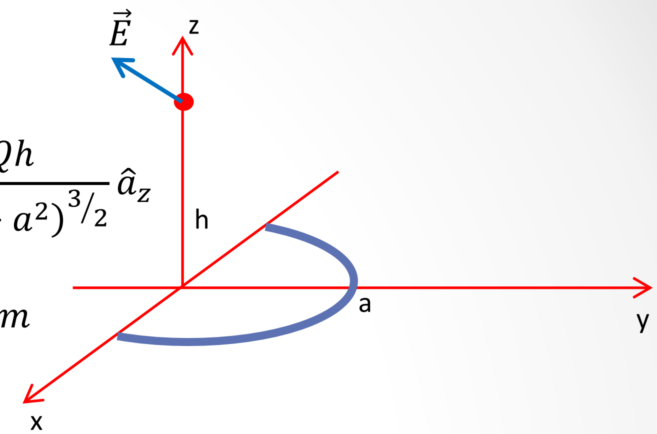
a) $\vec{L} = h\hat{a}_z \qquad \vec{R} = a\hat{a}_\rho \qquad \vec{r} = \vec{L} - \vec{R} = h\hat{a}_z - a\hat{a}_\rho \qquad \rho_l = \dfrac{Q}{\pi a}$

$$d\vec{E}_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_l dl}{r^2}\hat{r} \qquad \hat{r} = \frac{h\hat{a}_z - a\hat{a}_\rho}{\sqrt{h^2 + a^2}} \qquad dl = ad\varphi$$

$$\vec{E}_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_l dl}{r^2}\hat{r} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{(h^2 + a^2)}\frac{h\hat{a}_z - a\hat{a}_\rho}{\sqrt{h^2 + a^2}} Rd\varphi$$

$$\vec{E}_L = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\int \frac{a}{(h^2 + a^2)^{3/2}} ad\varphi\hat{a}_\rho + \int \frac{\mathrm{h}}{(h^2 + a^2)^{3/2}} ad\varphi\hat{a}_z\right\}$$

2.3) A figura abaixo mostra uma linha de carga semicircular de raio a, carregada com carga total -Q. Ela está totalmente no plano yz.
a) Escreva a expressão integral de todas as componentes do campo elétrico para o cálculo do campo elétrico num ponto a uma distância h em cima do eixo z que está posicionado no centro do semicírculo.
b) Calcule o vetor campo elétrico no ponto do item a.



b)

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{h}}{(h^2+a^2)^{3/2}}\, a d\varphi \hat{a}_z = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{h}\pi R}{(h^2+a^2)^{3/2}}\hat{a}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qh}{(h^2+a^2)^{3/2}}\hat{a}_z$$

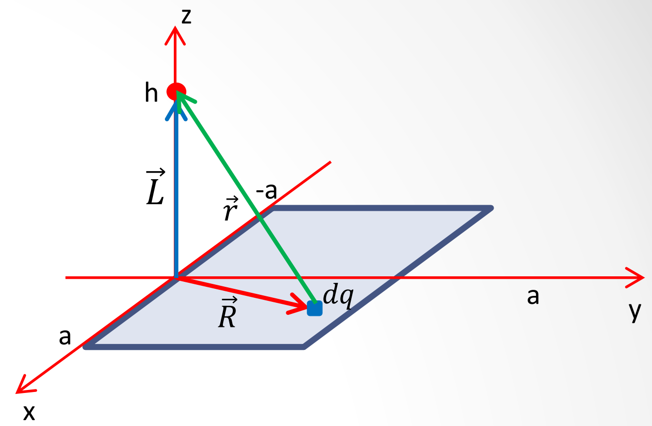
$$\vec{E}_\rho = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{a}}{(h^2+a^2)^{3/2}}\hat{a}_\rho a d\varphi \text{ ,mas } \hat{a}_\rho = cos\varphi \hat{a}_x + sen\varphi \hat{a}_y \text{ ,assim}$$

$$\vec{E}_x = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{h}}{(h^2+a^2)^{3/2}} cos\varphi\, a d\varphi \hat{a}_x = 0 \qquad \text{Pode se argumentar por simetria}$$

$$\vec{E}_y = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{a}}{(h^2+a^2)^{3/2}} sen\varphi\, a d\varphi \hat{a}_y = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2}{(h^2+a^2)^{3/2}}\hat{a}_y = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{Qa}{(h^2+a^2)^{3/2}}\hat{a}_y$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{Qa}{(h^2+a^2)^{3/2}}\hat{a}_y + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qh}{(h^2+a^2)^{3/2}}\hat{a}_z$$

3.1) A figura abaixo mostra uma superfície retangular de lados a e 2a, carregada com carga total Q.
a) Escreva a expressão integral de todas as componentes do campo elétrico para o cálculo do campo elétrico num ponto a uma distância h em cima do eixo z.
b) Calcule o vetor campo elétrico no ponto do item a.



a)

$$\vec{L} = h\hat{a}_z \qquad \vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y$$

$$\vec{r} = \vec{L} - \vec{R} = h\hat{a}_z - x\hat{a}_x - y\hat{a}_y \qquad \hat{r} = \frac{h\hat{a}_z - x\hat{a}_x - y\hat{a}_y}{\sqrt{h^2 + x^2 + y^2}}$$

$$\vec{E}_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_S dS}{r^2}\hat{r} = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{(h^2 + x^2 + y^2)} \frac{h\hat{a}_z - x\hat{a}_x - y\hat{a}_y}{\sqrt{h^2 + x^2 + y^2}} dxdy$$

$$\vec{E}_L = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ -\int \frac{x}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy\ \hat{a}_x - \int \frac{y}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy\ \hat{a}_y + \int \frac{h}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy\ \hat{a}_z \right\}$$

b)

$$\vec{E}_x = -\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \int_{-a}^a \frac{x}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy\ \hat{a}_x = -\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \left[\frac{-1}{\sqrt{h^2 + x^2 + y^2}}\right]_{-a}^{a} dy\ \hat{a}_x = 0$$

Pode se argumentar por simetria

$$\vec{E}_y = -\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^a \int_0^a \frac{y}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dydx\ \hat{a}_y = -\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^a \left[\frac{-1}{\sqrt{h^2 + x^2 + y^2}}\right]_0^a dx\ \hat{a}_y$$

$$\vec{E}_y = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^a \left[\frac{1}{\sqrt{h^2 + x^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right] dx\ \hat{a}_y = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ ln\left[\sqrt{h^2 + x^2 + a^2} + x\right] - ln\left[\sqrt{h^2 + x^2} + x\right]\right\}_{-a}^{a} \hat{a}_y$$

Continua

Continuação da questão 3.1

$$\vec{E}_y = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ln\left[\frac{\sqrt{h^2+2a^2}+a}{\sqrt{h^2+2a^2}-a}\right] - ln\left[\frac{\sqrt{h^2+a^2}+a}{\sqrt{h^2+a^2}-a}\right]\right\}\hat{a}_y$$

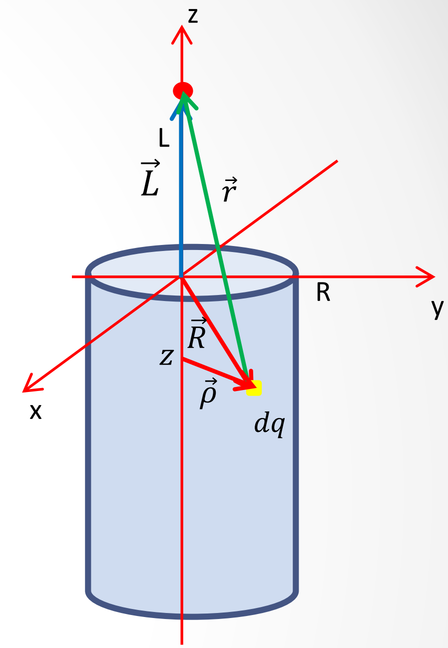
$$\vec{E}_z = \frac{\rho_S L}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\int_{-a}^a \frac{1}{(h^2+x^2+y^2)^{3/2}}dxdy\ \hat{a}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\left[\frac{x}{(h^2+y^2)\sqrt{h^2+x^2+y^2}}\right]_{-a}^{a}dy\ \hat{a}_z$$

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\left[\frac{a}{(h^2+y^2)\sqrt{h^2+a^2+y^2}} - \frac{-a}{(h+y^2)\sqrt{h^2+a^2+y^2}}\right]dy\ \hat{a}_z = \frac{2a\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\left[\frac{1}{(h^2+y^2)\sqrt{h^2+a^2+y^2}}\right]dy\ \hat{a}_z$$

$$\vec{E}_z = \frac{2a\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\left[\frac{1}{(h^2+y^2)\sqrt{h^2+a^2+y^2}}\right]dy\ \hat{a}_z$$

Esta eu ainda não resolvi.

3.2) A figura ao lado mostra um cilindro de raio a e comprimento d, carregado com densidade de carga ρ_V.
a) Escreva a expressão integral de todas as componentes do campo elétrico para o cálculo do campo elétrico num ponto a uma distância h, a partir da base de cima, em cima do eixo y que está posicionado no centro de simetria do cilindro, a partir do eixo de coordenadas estabelecido no centro do cilindro.
b) Calcule o vetor campo elétrico no ponto do item a.



a) $\vec{L} = L\hat{a}_z \qquad \vec{R} = \rho\hat{a}_\rho + z\hat{a}_z \qquad \rho_V = \dfrac{Q}{\pi R^2 d}$

$$\vec{r} = \vec{L} - \vec{R} = -\rho\hat{a}_\rho + (L-z)\hat{a}_z \qquad \hat{r} = \frac{-\rho\hat{a}_\rho + (L-z)\hat{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}}$$

$$\vec{E}_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_V dV}{r^2}\hat{r} = \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{(\rho^2+(L-z)^2)} \frac{-\rho\hat{a}_\rho + (L-z)\hat{a}_z}{\sqrt{\rho^2+(L-z)^2}}\rho d\varphi d\rho dz$$

$$\vec{E}_L = \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\int \frac{\rho^2}{(\rho^2+(L-z)^2)^{3/2}}\hat{a}_\rho\, d\varphi d\rho dz + \int \frac{(L-z)\rho}{(\rho^2+(L-z)^2)^{3/2}} d\varphi d\rho dz \hat{a}_z\right\}$$

b)
$$\vec{E}_\rho = -\frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{(\rho^2+(L-z)^2)^{3/2}}\hat{a}_\rho\, d\varphi d\rho dz = 0 \quad \textit{Pode se argumentar por simetria}$$

Quando somamos $\hat{a}_\rho$ variando φ o resultado da zero, pois é uma soma vetorial em todas as direções.

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{(L-z)\rho}{(\rho^2+(L-z)^2)^{3/2}} d\varphi d\rho dz\hat{a}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\int_0^a \frac{(L-z)\rho}{(\rho^2+(L-z)^2)^{3/2}} d\rho dz\hat{a}_z$$

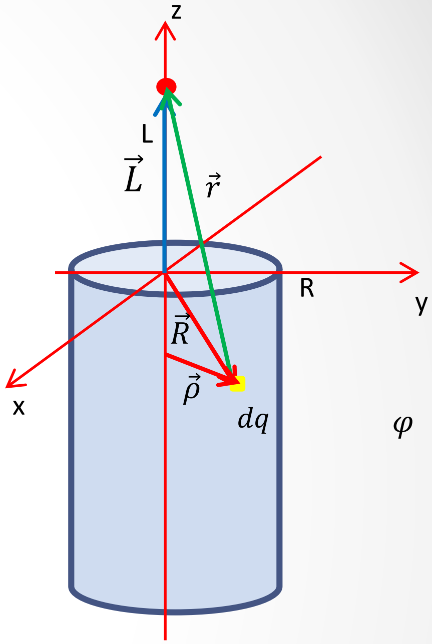
$$\vec{E}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\left[\frac{-(L-z)}{\sqrt{\rho^2+(L-z)^2}}\right]_0^a dz\hat{a}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\left[\frac{(L-z)}{|L-z|} - \frac{(L-z)}{\sqrt{a^2+(L-z)^2}}\right] dz\hat{a}_z$$

Continua

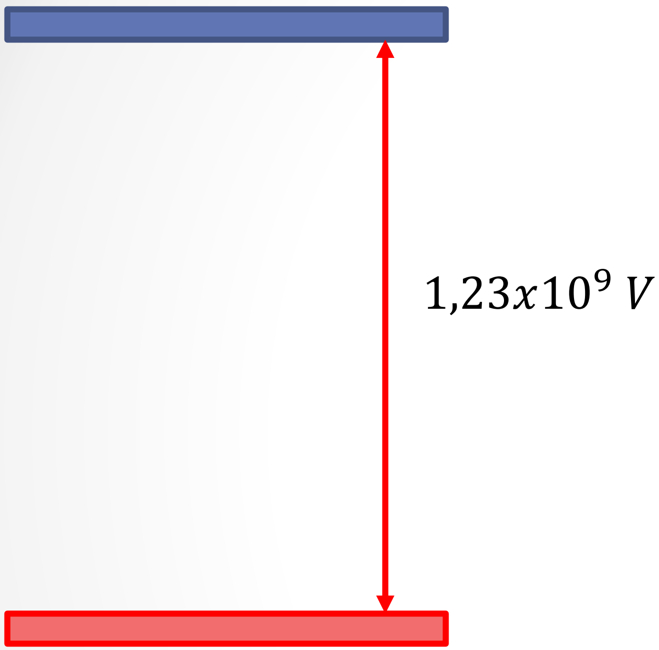
Continuação da questão 3.2

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\left[\frac{(L-z)}{|L-z|} - \frac{(L-z)}{\sqrt{a^2+(L-z)^2}}\right] dz\hat{a}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\left[z - \sqrt{a^2+(L-z)^2}\right]_{-d}^{0}\hat{a}_z$$

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\left[d + \sqrt{a^2+L^2} - \sqrt{a^2+(L+d)^2}\right]\hat{a}_z$$



4.2) A diferença de potencial elétrico entre os pontos de descarga durante uma determinada tempestade é de 1,23x10^{9}V. Qual é a intensidade da mudança da energia potencial elétrica de um elétron que se desloca entre estes pontos? Dê a sua resposta em (a) joules e (b) em elétron-volts..



$$\Delta U = q\Delta V = 1{,}6x10^{-19}x1{,}23x10^{9} = 2{,}0x10^{-10}J$$

$1eV$ *é a energia necessária para mover um elétron numa diferença de potencial de* $1V$

$$1eV = q\Delta V = 1{,}6x10^{-19}x1 = 1{,}6x10^{-19}J$$

$$2{,}0x10^{-10}J = 1eVx1{,}23x10^{9}V = 1{,}23x10^{9}eV$$

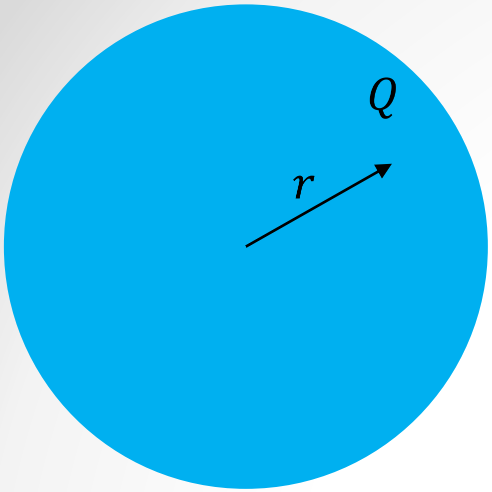
4.3) Calcule a auto energia eletrostática do núcleo de ouro-79, considerando-o uma esfera de raio 6,8x10^{-15}m, que contém a carga de 79 prótons uniformemente distribuída em seu interior.

$Au - 79prótons$

$$Q = 1,6x10^{-19}x79 = 1,26x10^{-17}C$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1,26x10^{-17}}{\frac{4}{3}\pi(6,8x10^{-15})^3} = 9,6x10^9\ {}^{C}/_{m^3}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_v \rho_{vol} V dv$$



$$W = \frac{1}{2}\int_v \rho_S V dv = \frac{1}{2}\rho_v \int_v V dv \qquad E = \frac{\rho_V}{3\varepsilon_0} r$$

$$V_r - V_S = -\int_R^r \vec{E}.d\vec{r} = -\int_R^r \frac{\rho_V}{3\varepsilon_0} r\, dr = -\frac{\rho_V}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

$$V_r - V_S = -\frac{Q}{4\pi R^3 \varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) \qquad V_S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

$$V_r = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2$$

$$W = \frac{1}{2}\rho_v \int_0^R \left(\frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2\right) 4\pi r^2 dr$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^R \left(\frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2\right) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\left(\frac{3}{2\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\frac{R^3}{3} - \frac{Q}{2\varepsilon_0 R^3}\frac{R^5}{5}\right)$$

$$W = \frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}\frac{4}{5} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

4.3) Calcule a auto energia eletrostática do núcleo de ouro-79, considerando-o uma esfera de raio 6,8x10^{-15}m, que contém a carga de 79 prótons uniformemente distribuída em seu interior.

Au
$-\ 79prótons$

$$\Delta U = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3x(1{,}26x10^{-17})^2}{20\pi x8{,}89xx10^{-12}x6{,}8xx10^{-15}}$$

$$\Delta U = 12{,}5\ kJ$$

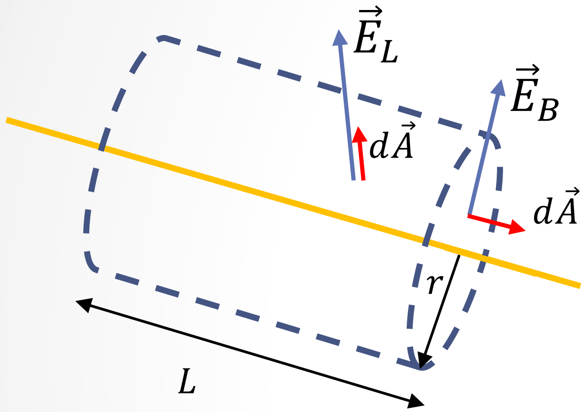
5.1) Uma linha fina e infinita é carregada com densidade homogênea de carga ρ_L é colocada no eixo de simetria de um cilindro dielétrico ideal de permissividade ε e raio a.

a) Calcule os vetores $\vec{E}, \vec{D}\ e\ \vec{P}$ em todo o espaço.

b) Mostre que o resultado de a satisfaz a condição de contorno na superfície do dielétrico.

c) Calcule o potencial eletrostático em todo o espaço.

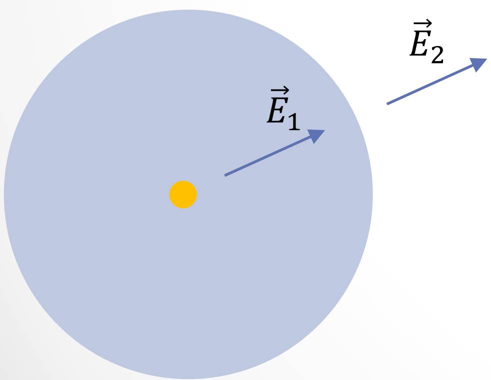
d) Mostre que a expressão do item d satisfaz a equação de Laplace ou Poisson, dependendo da região.



$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{Int}}{\varepsilon_0} \qquad E 2\pi r L = \frac{q_{Int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_L L}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\rho_L}{2\pi r \varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi r \varepsilon_0} \hat{a}_\rho$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_L}{2\pi r\ \varepsilon} \hat{a}_\rho \qquad \vec{E}_2 = \frac{\rho_L}{2\pi r\ \varepsilon_0} \hat{a}_\rho$$



$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{P} = \varepsilon \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\rho_L}{2\pi r} \hat{a}_\rho \qquad \vec{D}_2 = \frac{\rho_L}{2\pi r} \hat{a}_\rho$$

$$\vec{P}_1 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon} \frac{\rho_L}{2\pi r} \hat{a}_\rho \qquad \vec{P}_2 = 0$$

$$Condições\ de\ contorno \qquad \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} = 0 \qquad \vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} = \frac{\rho_L}{2\pi r} \hat{a}_\rho$$

5.2) A região 1 ($z<0$) contém um dielétrico para o qual $\varepsilon_r = 1{,}0$, enquanto que a região 2 ($z>0$) é caracterizada por $\varepsilon_r=3{,}0$. Considere $\vec{E}_1 = 10\hat{a}_x + 15\hat{a}_y - 20\hat{a}_z\ V/m$. Determine:

a) $\vec{D}_2$;

b) $\vec{P}_2$;

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_R \varepsilon_0 \vec{E}_1 \qquad \vec{D}_1 = 1{,}0\varepsilon_0(10\hat{a}_x + 15\hat{a}_y - 20\hat{a}_z) = \varepsilon_0(10\hat{a}_x + 15\hat{a}_y - 20\hat{a}_z)$$

$$No\ plano\ z = 0 \qquad \vec{D}_{1n} = -20\varepsilon_0\hat{a}_z \qquad \vec{E}_{1t} = 10\hat{a}_x + 15\hat{a}_y$$

$$No\ contorno \qquad \vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \qquad \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

$$Na\ região\ 2 \qquad \vec{D}_{2n} = -20\varepsilon_0\hat{a}_z \qquad \vec{E}_{2t} = 10\hat{a}_x + 15\hat{a}_y$$

$$mas \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{D}_2 = \varepsilon_R\varepsilon_0\vec{E}_2 \qquad \vec{D}_{2n} = \varepsilon_R\varepsilon_0\vec{E}_{2n} \qquad \vec{D}_{2t} = \varepsilon_R\varepsilon_0\vec{E}_{2t}$$

$$\vec{D}_{2t} = 3{,}0\varepsilon_0(10\hat{a}_x + 15\hat{a}_y) = \varepsilon_0(30\hat{a}_x + 45\hat{a}_y)$$

$$\vec{E}_{2n} = \frac{-20\varepsilon_0\hat{a}_z}{3{,}0\varepsilon_0} = -6{,}7\hat{a}_z \qquad \vec{D}_2 = \varepsilon_0(30\hat{a}_x + 45\hat{a}_y - 20\hat{a}_z)$$

$$\vec{E}_2 = 10\hat{a}_x + 15\hat{a}_y - 6{,}7\hat{a}_z$$

$$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0\vec{E}_2 = \varepsilon_0(20\hat{a}_x + 30\hat{a}_y - 13{,}3\hat{a}_z)$$

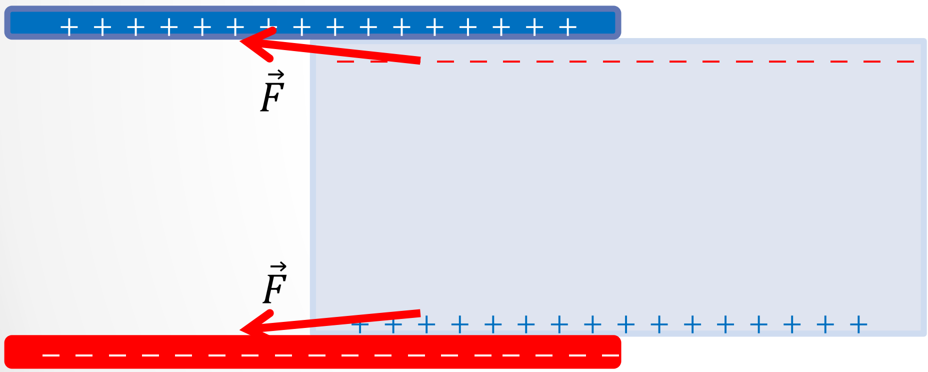
5.3) Um capacitor de capacitância 20μF foi carregado com uma diferença de potencial de 220V depois a fonte é retirada mantendo as cargas. Calcule a quantidade de energia acumulada. Um dielétrico de ε_R=10 é colocado entre as placas. Calcule a nova quantidade de energia. O que aconteceu com a diferença de energia entre as duas situações.

$$U = \frac{1}{2} C_0 {V_0}^2 = \frac{1}{2} 20x10^{-6} 220^2 = 484mJ$$

Depois de colocado o dielétrico, como a quantidade de carga se mantém, já que a fonte foi desligada

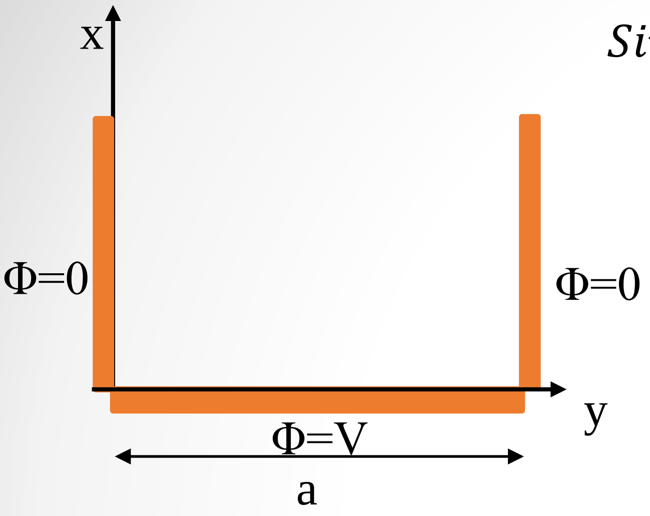
$$Novo\ V = \frac{q}{\varepsilon_R C_0} = \frac{V_0}{\varepsilon_R} = \frac{220}{10} = 22V$$

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_R C_0 V^2 = \frac{1}{2} 10x20x10^{-6} 22^2 = 4{,}84mJ$$



Quando o dielétrico é colocado nas placas do capacitor, as cargas de polarização ficam em posição invertida às das placas, isto leva à aparecer uma força de atração entre as placas e o dielétrico, que seria acelerado se não fosse a intervenção externa fazendo com que o dielétrico ficasse parado no interior do capacitor. A intervenção externa realiza um trabalho negativo diminuindo a energia que foi entregue ao dielétrico para ele acelerar, então a energia total do sistema diminui.

5.4) Para a calha infinitamente longa, tanto na direção x como na direção z, submetida aos potenciais de fronteira mostrados na figura determine a carga total induzida em uma porção longitudinal de comprimento l da superfície condutora submetida ao potencial V.



$$Simetria\ cartesiana \qquad \nabla^2\Phi = 0 \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

Como as variações em x de um lado independem das variações de y do outro, você pode escrever $\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$

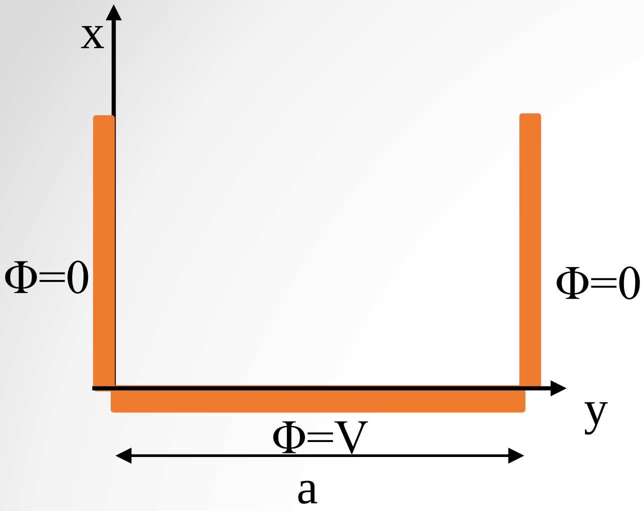
então $$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \qquad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = c$$

Só há variável x de um lado e y do outro, esta igualdade então é constante

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = c \qquad \frac{d^2X}{dx^2} = cX \qquad X(x) = Ae^{-\sqrt{c}x} + Be^{\sqrt{c}x}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx^2} = -c \qquad \frac{d^2Y}{dx^2} = -cY \qquad Y(y) = Ae^{-i\sqrt{c}y} + Be^{i\sqrt{c}y}$$



$$X(x) = Ae^{-\sqrt{c}x} + Be^{\sqrt{c}x}$$

$$x = 0 \qquad Ae^{-\sqrt{c}0} + Be^{\sqrt{c}0} = 0 \qquad B = -A$$

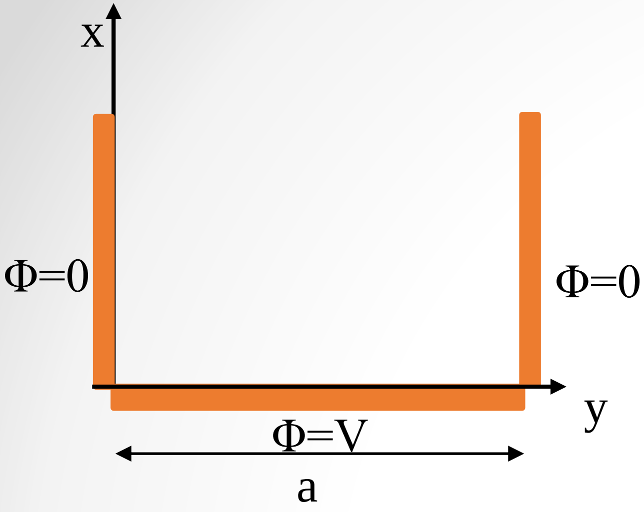
$$x = a \qquad Ae^{-\sqrt{c}a} + Be^{\sqrt{c}a} = 0 \qquad A\left(e^{-\sqrt{c}a} - e^{\sqrt{c}a}\right) = 0$$

$A\left(e^{-\sqrt{c}a} - e^{\sqrt{c}a}\right) = 0$ *Este só pode ser zero se* $\left(e^{-\sqrt{c}a} - e^{\sqrt{c}a}\right) = 0$

Este só pode ser zero se $c = -\lambda^2$ $\dfrac{\left(e^{-i\lambda a} - e^{i\lambda a}\right)}{2i} = sen\lambda a = 0$

$sen\lambda a = 0$ *este é zero para todos os valores de n inteiros para* $\lambda = \dfrac{n\pi}{a}$

então $X_n(x) = A_n sen\dfrac{n\pi}{a}x$



$$Y(y) = Ce^{-i\sqrt{c}y} + De^{i\sqrt{c}y}$$

$$c = -\lambda^2 \qquad Y(y) = Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y}$$

$$y \to \infty \qquad Y(y) \to 0 \qquad D = 0$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \qquad Y_n(y) = C_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

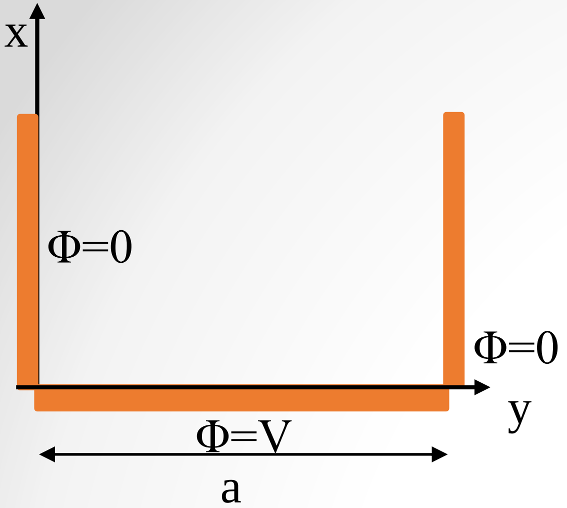
C_n *e* A_n *se juntam numa só constante*

$$\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} sen \frac{n\pi}{a} x$$

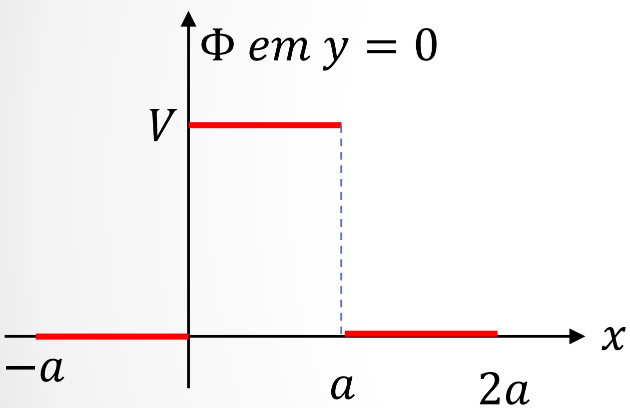
O somatório é porque cada n é uma solução da equação de Laplace e obedece as condições de contor para um A_n *específico*

$$y = 0 \qquad \Phi = V \qquad \Phi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n sen \frac{n\pi}{a} x \ = V$$



$$\Phi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n sen\frac{n\pi}{a}x = V$$

Mas Φ *só é* V *entre* 0 *e* a. *Como no resto da região*,
pelo lado de fora, o potencial é zero, para achar A_n ,
podemos usar a função periódica da onda quadrada do gráfico.



$$A_n = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} \Phi(x,0)\, sen\frac{n\pi}{a}xdx = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} V sen\frac{n\pi}{a}xdx$$

$$A_n = \frac{V}{2a}\int_0^{a} sen\frac{n\pi}{a}xdx = -\frac{V}{2a}\frac{a}{n\pi}(cosn\pi - 1)$$

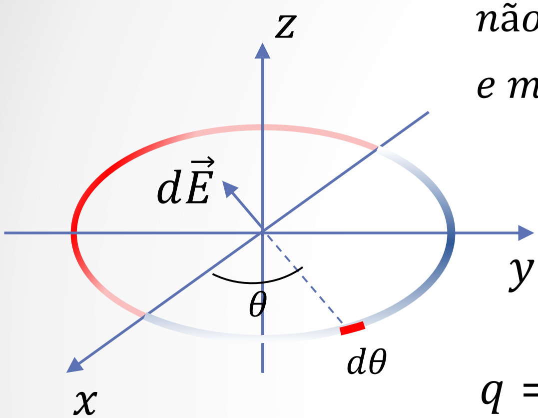
$$A_n = \frac{V}{n\pi}\ para\ n\ ímpar\ e\ \ A_n = 0\ para\ n\ par$$

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} sen\frac{n\pi}{a}x \qquad \Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V}{(2n+1)\pi} e^{-\frac{(2n+1)\pi}{a}y} sen\frac{(2n+1)\pi}{a}x$$

5.5) Considere um anel de carga de raio a e densidade linear de carga $\lambda(\theta) = \lambda_0 sen(\theta)$. O anel de carga tem centro na origem e está localizado no plano.

a) Determine a carga total do anel.

b) Determine a força que seria exercida sobre uma carga q posicionada exatamente no centro do anel, admitindo que essa carga não influencie a distribuição de carga do anel.



Sendo a densidade linear de carga dada pela expressão $\lambda(\theta) = \lambda_0 sen(\theta)$, *não há carga para* $\theta = 0$ *e* $\theta = \pi$, *e ela será máxima positiva em* $\theta = {}^{\pi}/_{2}$ *e máxima negativa em* $\theta = {}^{3\pi}/_{2}$.

$$dq = \lambda(\theta)ds = \lambda(\theta)ad\theta = \lambda_0 sen(\theta)ad\theta$$

$$q = \int_0^{2\pi} \lambda_0 sen(\theta)ad\theta = 0$$

A carga total do anel é zero.

Podemos calcular a força calculando o campo elétrico no centro.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{a^2}cos\theta(-\hat{e}_x) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{a^2}sen\theta(-\hat{e}_y)$$

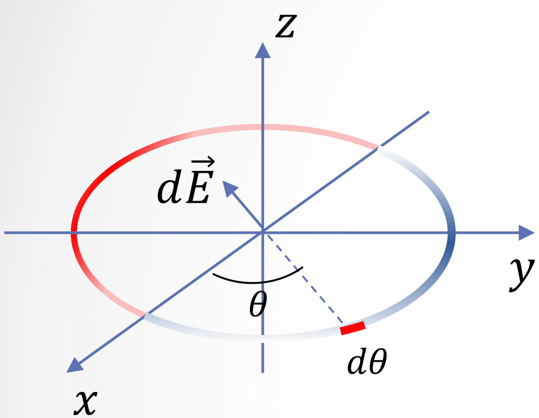
$$dq = \lambda_0 sen(\theta)ad\theta$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\lambda_0}{a^2}cos\theta sen\theta d\theta(-\hat{e}_x) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\lambda_0}{a^2}sen^2\theta d\theta(-\hat{e}_y)$$

5.5) Considere um anel de carga de raio a e densidade linear de carga $\lambda(\theta) = \lambda_0 sen(\theta)$. O anel de carga tem centro na origem e está localizado no plano.

a) Determine a carga total do anel.

b) Determine a força que seria exercida sobre uma carga q posicionada exatamente no centro do anel, admitindo que essa carga não influencie a distribuição de carga do anel.



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\lambda_0}{a^2}cos\theta sen\theta d\theta(-\hat{e}_x) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\lambda_0}{a^2}sen^2\theta d\theta(-\hat{e}_y)$$

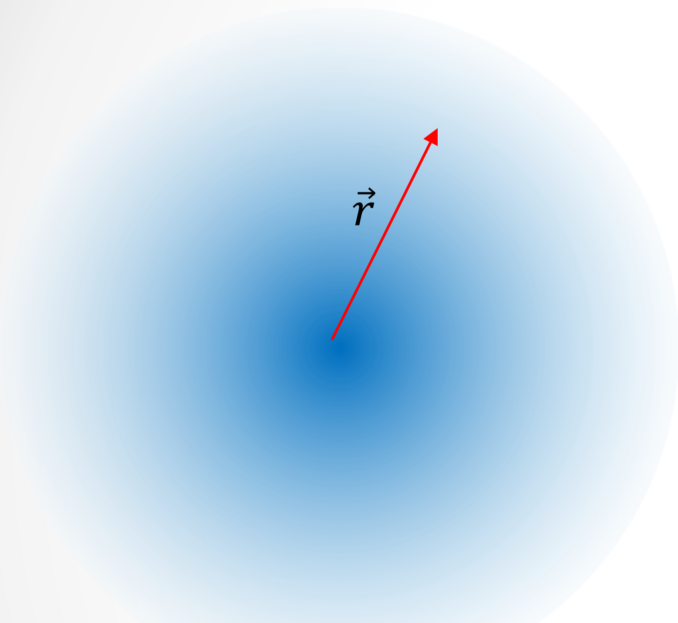
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{a}\int_0^{2\pi} cos\theta sen\theta d\theta\,(-\hat{e}_x) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{a}\int_0^{2\pi} sen^2\theta d\theta\ (-\hat{e}_y)$$

$$\int_0^{2\pi} cos\theta sen\theta d\theta = 0 \qquad \int_0^{2\pi} sen^2\theta d\theta = \frac{1}{2} \qquad \vec{E} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{a}\hat{e}_y \qquad \vec{F} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q\lambda_0}{a}\hat{e}_y$$

5.6) Uma distribuição de cargas no vácuo é descrita pela função densidade $\rho(r) = \rho_0 e^{-r/R}$, onde R é constante e r é a distância entre o eixo de coordenadas e um ponto qualquer no espaço.

a) Resolva a eq. de Poisson para obter a função potencial em todo o espaço. Admita que o potencial seja nulo no infinito.

b) Calcule o vetor campo elétrico em todo o espaço e compare seu valor para r=R e r=10R.



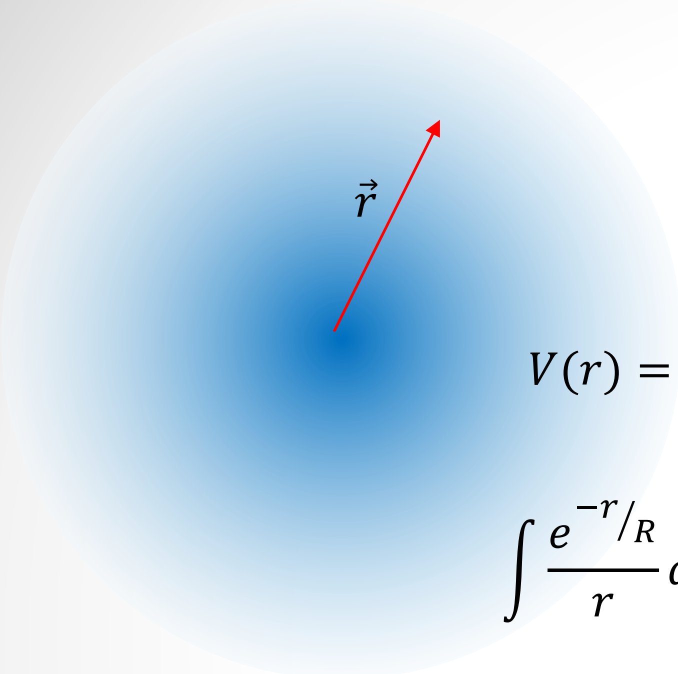
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\,V}{dr}\right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\,V}{dr}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 r^2 e^{-r/R}$$

$$r^2 \frac{d\,V}{dr} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \int r^2 e^{-r/R} dr = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} e^{-r/R}(r^2 + 2Rr + 2R^2) + C$$

$$\frac{d\,V}{dr} = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} e^{-r/R}\left(1 + \frac{2R}{r} + 2\frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{C}{r^2}$$



$$\frac{dV}{dr} = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} e^{-r/R} \left(1 + \frac{2R}{r} + 2\frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{C}{r^2}$$

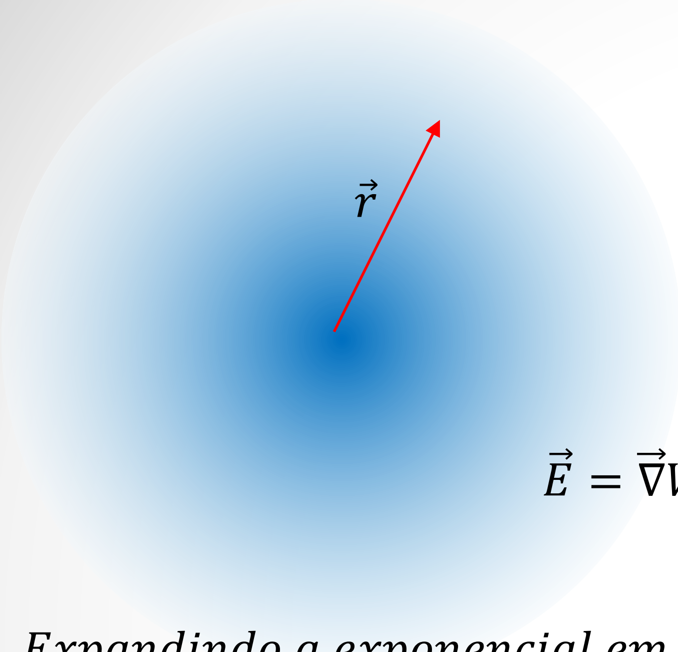
$$V(r) = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} \left[\int e^{-r/R} dr + 2R \int \frac{e^{-r/R}}{r} dr + 2R^2 \int \frac{e^{-r/R}}{r^2} dr\right] + \frac{C}{r^2}$$

$$\int \frac{e^{-r/R}}{r} dr = -R\frac{e^{-r/R}}{r} - R\int \frac{e^{-r/R}}{r^2} dr$$

$$V(r) = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} \left[-Re^{-r/R} - 2R^2 \frac{e^{-r/R}}{r} - 2R^2 \int \frac{e^{-r/R}}{r^2} dr + 2R^2 \int \frac{e^{-r/R}}{r^2} dr\right] - \frac{C}{r} + D$$

$$V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} \left(1 + \frac{2R}{r}\right) e^{-r/R} - \frac{C}{r} + D$$

$r \to \infty$ $\quad V(r \to \infty) \to 0$ $\quad \frac{e^{-r/R}}{r} \to 0$ $\quad V(r \to \infty) \to D$ $\quad D = 0$



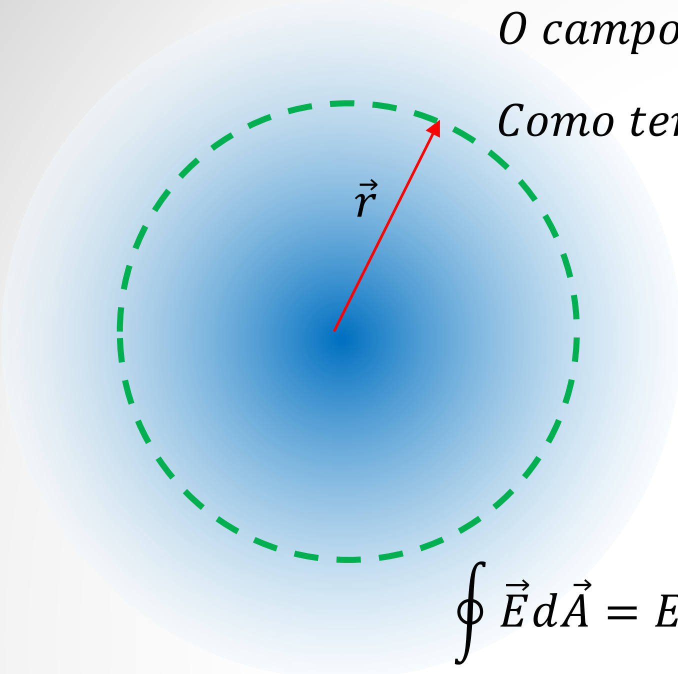
$$\frac{d\,V}{dr} = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} e^{-r/_R}\left(1 + \frac{2R}{r} + 2\frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{C}{r^2}$$

$$\vec{E} = \vec{\nabla}V = -\frac{d\,V}{dr}\hat{e}_r = -\left[\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} e^{-r/_R}\left(1 + \frac{2R}{r} + 2\frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{C}{r^2}\right]\hat{e}_r$$

Expandindo a exponencial em potências de r e multiplicando pelo parênteses, e fazendo $r \to 0$, todos os termos ficam zero, só sobrando

$$\vec{E}(r \to 0) = -\left[\frac{2\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2} + \frac{C}{r^2}\right]\hat{e}_r = 0 \qquad C = -\frac{2\rho_0 R^3}{\varepsilon_0}$$

$$V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{2R}{r}\right)e^{-r/_R} - \frac{2\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r}$$



O campo elétrico também pode ser calculado pela Lei de Gauss

Como temos uma simetria esférica só dependente de r

$$\oint \vec{E}d\vec{A} = \frac{q_{Int}}{\varepsilon_0}$$

Desenhando uma gaussiana esférica

$$\oint \vec{E}d\vec{A} = E4\pi r^2 = \frac{q_{Int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho_0 e^{-r/R} dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho_0 e^{-r/R}\ 4\pi r^2 dr$$

$$Er^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho_0 e^{-r/R}\ r^2 dr = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} e^{-r/R}(r^2 + 2Rr + 2R^2)]_0^r$$

$$Er^2 = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} e^{-r/R}(r^2 + 2Rr + 2R^2)]_0^r = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} e^{-r/R}(r^2 + 2Rr + 2R^2) - \frac{2\rho_0 R^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} e^{-r/R}\left(1 + \frac{2R}{r} + 2\frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{2\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2}$$

Expressão idêntica à da página anterior